

Formation de Grandes Structures : Champs d'Einstein-Dirac-Yang-Mills

Projet de thèse de doctorat - Nicolas Franco

Ce futur doctorat s'inscrirait dans la suite des travaux de thèse d'André Füzfa (FRIA de 2000 à 2002, FNRS de 2002 à 2004), ces travaux ayant permis l'étude numérique d'un système *Einstein-Yang-Mills* décrivant le couplage d'un champ de jauge ($SU(2)$) à la gravitation, ainsi que l'étude de l'influence d'un champ scalaire sur la formation de grandes structures.

Ce projet serait rattaché directement à l'unité de recherche **GAMASCO** de la Faculté des Sciences de l'Université de Namur. En effet, après plusieurs collaborations spontanées et interdisciplinaires, un groupe de recherche a vu le jour officiellement fin 2004, rassemblant actuellement des chercheurs des départements de Mathématique et de Physique, sous la responsabilité d'**Anne Lemaître** et de **Dominique Lambert**. Le Groupe d'Applications des MATHématiques aux Sciences du COsmos se veut pluridisciplinaire et ouvert à la collaboration internationale. Il collabore activement avec le LUTH à l'Observatoire de Paris, et a également établi des contacts privilégiés avec le Bénin (I.M.S.P. Porto-Novo), dans le but d'encadrer des séjours de formation à tous niveaux (doctoral, post-doctoral et académique).

Les statuts du GAMASCO prévoient (sauf mention contraire à l'engagement) que l'unité de recherche et d'enseignement de **Systèmes Dynamiques** du département de Mathématique accueille et encadre le doctorant pendant son séjour aux FUNDP, environnement idéal dans mon cas, puisque ma formation de base est en Mathématiques Appliquées. De plus, pour les aspects numériques, les algorithmes à tester et la construction de programmes de grande taille, je pourrai trouver au sein de ce département les compétences complémentaires nécessaires.

Le sujet présenté ici se réfère à la cosmologie mathématique, plus spécifiquement aux équations d'Einstein-Yang-Mills. Au vu des résultats déjà obtenus par l'équipe de Systèmes Dynamiques, dans d'autres domaines d'application, c'est dans le cadre du **formalisme Hamiltonien** et via des **méthodes numériques** adéquates de résolution des équations hamiltoniennes aux dérivées partielles que le problème serait abordé.

C'est cette approche numérique du formalisme hamiltonien, avec théorie de jauge et dans le cadre des équations d'Einstein-Yang-Mills, qui a fait la spécificité et l'originalité du travail d'André Füzfa et du groupe GAMASCO.

Dès lors, dès le départ, c'est une forme plus complexe de ces mêmes équations que je souhaiterais étudier, les équations d'*Einstein-Dirac-Yang-Mills* (EDYM par la suite) qui supposent un couplage entre la gravité et les autres forces fondamentales. Ce couplage non linéaire agit entre, d'une part, la gravité et, d'autre part, l'équation de Dirac (décrivant des champs de matière) et un champ typique de Yang-Mills (décrivant des champs d'interactions).

Avant la phase de nucléosynthèse primordiale, les modèles de dynamique des fluides, basés sur des approximations hydrodynamiques, doivent être remplacés par des modèles microscopiques liés à la théorie des champs. C'est dans ce cadre particulier-là, et à cette époque de l'évolution, que les équations EDYM s'appliquent.

Des travaux particulièrement intéressants dans ce contexte ont été publiés par J. Smoller et ses collaborateurs, F. Finster, S.-T. Yau et N. Kamran (voir références), montrant en particulier l'existence de solutions stables (au sens numérique) correspondant à des particules à symétrie sphérique et étudiant le comportement de solutions de type "trous noirs", toujours à symétrie sphérique. D'une façon générale, c'est l'interaction entre les particules de Dirac et les champs de jauge non abéliens associés à la gravitation qui a retenu leur attention.

Je commencerais par une étude systématique de leurs résultats concernant les équations EDYM, pour y insérer par la suite **SU(3)** comme groupe de jauge - combinaison qui, à ma connaissance, n'a jamais été exploitée dans le cadre de EDYM - en vue de traiter, à terme, le groupe d'unification $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

De plus, comme mathématicien, je voudrais également tester l'**influence du schéma numérique choisi** pour la résolution des équations aux dérivées partielles sur le type de solution obtenue. Ce fut l'une des réflexions du GAMASCO à l'issue des travaux d'A. Füzfa, projet qui n'a pas encore été concrétisé et pourrait déboucher sur une étude systématique des schémas d'intégration (des schémas de type Leap-Frog uniquement ont été implémentés et testés jusqu'ici).

Enfin, je souhaiterais appliquer ces méthodes numériques à la problématique de la **formation des grandes structures** dans l'univers primordial, avant l'émission du CMB. Le choix des équations EDYM pour ce sujet est particulièrement pertinent. En effet, celles-ci devraient jouer un rôle essentiel pour comprendre les mécanismes contribuant à la formation des grandes structures.

Si on choisit un modèle d'Univers avec matière sombre chaude (HDM), il est très (voire trop) facile de produire des structures à grande échelle, mais elles arrivent trop tard sur l'échelle de temps. Par contre, dans le cas d'un modèle d'Univers avec matière sombre froide (CDM), la formation des galaxies intervient plus tôt dans le temps, mais les mesures de distances entre les différentes galaxies ne collent pas avec les observations. Ce sont donc des modèles mixtes, combinant HDM et CDM en particulier, qui sont actuellement prônés et testés.

Chaque Univers construit peut être confronté avec les observations de l'Univers de plus en plus complètes grâce aux données de haute précision dont nous disposons. En particulier, pour comparer deux modèles d'Univers, on peut confronter leurs prédictions quant aux **fluctuations du fond de rayonnement cosmologique** (CMB). Les résultats des satellites COBE (1989 - 1993) et WMAP (depuis 2001) ont permis d'affiner considérablement les cartes de CMB, et ont donc conditionné et départagé certains modèles d'Univers, et ce n'est que le début de l'ère spatiale dans ce domaine. La mission Planck devrait prendre le relais dans le futur (le lancement est prévu début 2007) et apporter un plus grand degré de précision, nécessaire à la sélection des différents modèles.

Les applications potentielles de ce modèle seraient très nombreuses: citons, par exemple, l'apparition des trous noirs primordiaux, les fluctuations de l'inflation avant émission du CMB, la recherche des solutions cosmologiques des équations EDYM et leur résistance aux perturbations, la mise en évidence des défauts topologiques, et de façon plus générique, les contributions à la relativité numérique, comme les ondes gravitationnelles primordiales.

En résumé, je présente mon projet en 3 points, dans un ordre non nécessairement chronologique:

1. Partie théorique:

- a. Etablir les équations EDYM sous différentes hypothèses
- b. Etudier les solutions particulières publiées dans la littérature (jauge = $SU(2)$)
- c. Etudier l'extension du formalisme au cas d'une jauge de type $SU(3)$, et éventuellement au cas d'une des combinaisons suivantes: $SU(2) \times SU(3)$, $U(1) \times SU(3)$

2. Partie numérique:

- a. Construire un programme d'intégration numérique et reproduire les solutions connues
- b. Tester la pertinence de ces résultats par d'autres schémas numériques
- c. Utiliser le schéma retenu pour des simulations d'Univers, sur base des données les plus récentes

3. Partie constructive

- a. Confronter les modèles obtenus avec les observations récentes (CMB en particulier)
- b. Caractériser les mécanismes de formation compatibles avec la théorie et les observations pour la formation de grandes structures

Références:

- F. Finster, J. Smoller and S.-T. Yau, *Particle-Like Solutions of the Einstein-Dirac Equations*, Phys. Rev. D59, 1999, 104020 [gr-qc/9801079]
- F. Finster, J. Smoller and S.-T. Yau, *The Interaction of Dirac Particles with Non-Abelian Gauge Fields and Gravitation - bound states*, Nuclear Physics, B, 584, 2000, pp. 387-414. [gr-qc/0001067]
- F. Finster, J. Smoller and S.-T. Yau, *The Interaction of Dirac Particles with Non-Abelian Gauge Fields and Gravitation - Black Holes*, Michigan Math. J., 47, 2000, pp. 199-208. [gr-qc/9910047]
- F. Finster, N. Kamran, J. Smoller and S.-T. Yau, *Non-Existence of Time Periodic Solutions of the Dirac Equation in an Axisymmetric Black-Hole Geometry*, Comm. Pure Appl. Math, 53, 2000, pp. 902-929. [gr-qc/9905047]
- F. Finster, J. Smoller and S.-T. Yau, *Absence of Static, Spherically Symmetric Black Hole Solutions for Einstein-Dirac-Yang/Mills Equations with Complete Fermion Shells*, Adv. Theor. Math. Phys. 4, 2002, pp. 1231-1257. [gr-qc/0005028]
- A. Füzfa, *Instabilités gravitationnelles de champs de Yang-Mills et de champs scalaires dans l'univers primordial*, Thèse de Doctorat, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Département de Mathématiques, Namur, 2004.
- A. Füzfa, *Gravitational Instability of Yang-Mills Cosmologies*, Classical and Quantum Gravity, 20 (22), 2003, pp. 4753-4774. [gr-qc/0310032]